Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,15(3), 1068-1079, 2025
Journal of the Institute of Science and Technology, 15(3), 1068-1079, 2025

ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.1575120**

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Geliş tarihi / *Received*: 28.10.2024 **Kabul tarihi / *Accepted*: 19.02.2025**

Atıf İçin: Özbağ, F. ve Yokuş, H. (2025). Reaksiyon-Konveksiyon-Difüzyon Sisteminde Ters Yönde İlerleyen Dalgaların Kararlılık Analizi. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 15(3), 1068-1079.

To Cite: Özbağ, F. & Yokuş, H. (2025). Stability Analysis of Counterflow Traveling Waves in Reaction-Convection-Diffusion System. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 15(3), 1068-1079.

Reaksiyon-Konveksiyon-Difüzyon Sisteminde Ters Yönde İlerleyen Dalgaların Kararlılık Analizi

Fatih ÖZBAĞ[1*], Hacire YOKUŞ[1]

Öne Çıkanlar:
- Reaksiyon konveksiyon difüzyon sistemi çalışılmıştır.
- Ters yönde ilerleyen dalgaların tipi belirlenmiştir.
- Spektral ve lineer kararlılık analizi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler:
- Gözenekli ortam
- Kararlılık
- Spektrum
- Yanma dalgası
- İlerleyen dalgalar

ÖZET:

Bu çalışma, akışkan olmayan petrol geri kazanım tekniklerindeki önemi nedeniyle yanma dalgalarını incelemektedir. Çalışmanın temel amacı, başlangıçta gözenekli bir ortamda bulunan sınırlı miktardaki katı yakıta hava pompalandığında ortaya çıkan ilerleyen dalgaların varlığını ve kararlılığını göstermektir. İncelenen yanma sistemi, sıcaklık, oksijen ve katı yakıt denge yasalarını veren üç farklı kısmi diferansiyel denklemle modellenmiş olup, bu denklemlerden birinde difüzyon terimi bulunurken diğerlerinde bulunmamaktadır. Literatürdeki mevcut çalışmalardan farklı olarak, bu araştırmada yanma sisteminin oksijen denklemine bir difüzyon terimi eklenmiş ve bu değişikliğin yanma dalgalarını etkilemediği gösterilmiştir. Daha sonra, sistemin spektrumu ve ağırlık fonksiyonu analiz edilmiştir. Son olarak, ters yönde hareket eden yanma dalgaları için lineer kararlılık analizi yapılmıştır. Bu analizler, oksijen ve sıcaklık hızlarının eşit olduğu ve ilerleyen dalga hızının negatif olduğu varsayımı altında gerçekleştirilmiştir.

Stability Analysis of Counterflow Traveling Waves in Reaction-Convection-Diffusion System

Highlights:
- Reaction convection diffusion system has been studied.
- Type of counter flow traveling waves has been determined.
- Spectral and linear stability analysis have been done.

Keywords:
- Porous media
- Stability
- Spectrum
- Combustion waves
- Traveling waves

ABSTRACT:

This study examines combustion waves due to their importance in non-fluid oil recovery techniques. The primary objective is to demonstrate the existence and stability of traveling waves that emerge when air is injected into a porous medium initially containing a limited amount of solid fuel. The investigated combustion system is modeled using three different partial differential equations that govern the conservation of temperature, oxygen, and solid fuel. Among these equations, only one includes a diffusion term, while the others do not. Unlike previous studies in the literature, this research introduces a diffusion term into the oxygen equation of the combustion system and demonstrates that this modification does not affect the combustion waves. Subsequently, the spectrum and weight function of the system are analyzed. Finally, a linear stability analysis is conducted for combustion waves propagating in the reverse direction. These analyses are performed under the assumption that the velocities of oxygen and temperature are equal and that the traveling wave velocity is negative.

[1] Fatih ÖZBAĞ (**Orcid ID:** 0000-0002-5456-4261), Hacire YOKUŞ (**Orcid ID:** 0000-0002-7800-0903), Harran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Şanlıurfa, Türkiye

***Sorumlu Yazar/*Corresponding Author*:** Fatih ÖZBAĞ, e-mail: fozbag@harran.edu.tr

Bu çalışma Hacire Yokuş'un Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir.
Makale 9-10 Mart 2022 tarihlerinde Kayseri'de düzenlenen "7. Uluslararası Erciyes Bilimsel Araştırmalar Kongresi'nde" sözlü olarak sunulmuştur.

GİRİŞ

Yanma dalgaları, akışkan olmayan petrol geri kazanım tekniklerinde yaygın olarak incelenmektedir. En yaygın kullanılan petrol geri kazanım yöntemleri; hava enjeksiyonu (yerinde yanma), buhar enjeksiyonu ve su enjeksiyonudur. Bu çalışmada, hava enjeksiyonu kullanılarak geliştirilmiş petrol geri kazanımının basitleştirilmiş, tek boyutlu bir modelinde ortaya çıkan yanma dalgaları incelenmiştir. Yerinde yanmanın arkasındaki temel amaç, petrol viskozitesini düşürmek ve petrol akışını zenginleştirmektir.

Bu makale gözenekli ortamdaki yanma dalgalarının analizine ayrılmıştır. Ele alınan modelde, bir yanma dalgası sadece sabit uç durumlarına sahip sürekli durmaksızın hareket eden bir dalgadır. Yanma dalgalarının kararlılığını anlamak petrol kazanımını maksimum seviyeye çıkarmaya yardımcı olur. Gözenekli ortamdaki yanma dalgaları ile ilgili çalışmalardan bazıları şunlardır (Akkutlu ve Yortsos, 2003; Marchesin ve Shecter, 2003; Souza, 2008; Chapiro ve Souza, 2016; Ozbag ve Shecter, 2018; Ozbag, 2022).

(Akkutlu ve Yortsos, 2003)'de, zayıf ısı kayıplarını konveksiyon ve iletim yoluyla dikkate alarak gözenekli ortamdaki ileri yanma cephelerinin yayılımını adyabatik ve adyabatik olmayan koşullar altında analiz etmektedir. Sıcaklık, konsantrasyon profilleri, cephe hızı ve sönme eşikleri için analitik ifadeler türetilmiş olup, çoklu kararlı durum çözümleri ve kendini sürdüren yanma koşulları ortaya konmuştur. (Marchesin ve Shecter, 2003) çalışmasında, petrol rezervuarlarında oksidasyonu modelleyerek ısı kaybının oksidasyon cephelerinin oluşumunu ve sürdürülebilirliğini etkilediğini, düşük ısı kaybının uzun hareketli darbeler oluşturduğunu, aşırı kaybın oksidasyon darbelerini engellediğini ve eksik yanmanın yanmamış oksijenin üretim kuyularına ulaşmasına neden olduğunu göstermektedir. (Chapiro ve Souza, 2016)'da katı yakıt ve hava enjeksiyonu ile bir gözenekli kaya silindiri içindeki yanma cephesini analiz etmekte ve karşı akışlı yanmanın ilerleyen dalga profilini yaklaşık olarak belirlemek için asimptotik genişleme ve sayısal simülasyonlar kullanmaktadır. (Ozbag, 2022) makalesinde, gözenekli ortamlar için basitleştirilmiş, bir boyutlu bir yanma modelindeki yanma dalgaları incelenmektedir. Hava enjeksiyonu kullanılarak hem aynı yönde hem de zıt yönde hareket eden yanma durumlarını, zıt yöndeki yanma durumu için negatif yanma dalgası hızı ile dikkate alır. Çalışma, nümerik simülasyonlar yoluyla tüm olası dalga dizilerinin sınıflandırılmasını yapar ve oksijenin sıcaklıktan daha hızlı taşındığı durumu da dahil ederek, yanma dalgalarının ve temas süreksizliklerinin etkileşimini inceler.

Asıl amaç; ilk durumda bir miktar katı yakıt bulunan gözenekli ortama hava pompalandığında ortaya çıkan ilerleyen dalgaların varlığını ispatlamaktır. Çalıştığımız model ilk kez (Akkutlu ve Yortsos, 2003) tarafından öne sürülen yanma modeline dayanmaktadır ve (Chapiro ve ark., 2014; Chapiro ve Senos, 2017; Ozbag ve ark., 2018) çalışmalarında daha da geliştirilmiştir. Ele alınan yanma sistemi parçalı paraboliktir. Üzerinde çalıştığımız model sıcaklık, oksijen ve katı yakıt denge yasalarını veren üç farklı diferansiyel denklemden oluşur. Bu modelde, sıcaklık denkleminde difüzyon terimi var iken oksijen ve katı yakıt denklemlerinde difüzyon terimi bulunmamaktadır, ayrıca katı yakıt yayılmaz ve oksijen yayılımının önemsenmediği kabul edilir.

Aynı yönde (co-flow) ve ters yönde (counter-flow) olmak üzere iki tip dalga vardır. Aynı yönde ilerleyen dalgaların varlığı, oksijen ve ısının aynı hızda taşındığı durum için (Chapiro ve ark., 2014)'de pozitif hıza sahip dört tür yanma dalgası olduğu tespit edilmiştir. Bunlardan ikisi hızlı diğer ikisi ise yavaş yanma dalgalarıdır. (Ozbag ve ark., 2018)'da ise sıcaklık hızının oksijen hızından küçük kabul edilerek pozitif hıza sahip altı tür yanma dalgasının olduğu tespit edilmiştir. Bu dalgalardan ikisi hızlı yanma dalgası, ikisi yavaş yanma dalgası, diğer ikisi ise ara yanma dalgalarıdır.

Ters yönde ilerleyen yanma dalgaların varlığı, oksijen ve ısının aynı hızda taşındığı durum için (Chapiro ve Senos, 2017)'de ve daha önemli durum olan oksijenin sıcaklıktan daha hızlı taşındığı durum için (Barlas, 2020)'da ispatlanmıştır. Burada yanma dalgası negatif bir hıza sahiptir (c <0). Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları ile ilgili çalışmalardan bazıları (Schult ve ark.,1998; Ozbag ve Kuru, 2021) çalışmalarında bulunmaktadır.

Bu çalışma mühendislik, fizik ve uygulamalı matematik gibi uygulamalı bilimlerin pek çok farklı alanlarında kullanılan ilerleyen dalgaların analizine ayrılmıştır. Burada, özellikle mühendislik alanında petrol kazanımı metotlarında kullanılan yanma dalgalarının varlığının, çözümünün ve kararlılığının ispatlanması bu alanda önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada, oksijen denklemine difüzyon terimi eklendikten sonra oksijen ve sıcaklığın hızları eşit kabul edilerek ve yanma dalgasının hızı negatif kabul edilerek bulunan ilerleyen dalgaların kararlılık analizinin yapılması, bu çalışmayı diğer yapılan çalışmalardan farklı kılmaktadır.

Modelimiz, faz düzlemi analizi adı verilen bir teknikle hareket eden dalgaların varlığını kanıtlamamızı sağlayan doğrusal olmayan sistemlerin davranışını incelemek için uygun bir biçimde basitleştirilmiştir. Bu nedenle modele difüzyon terimi eklendiğinde yanma dalgalarının değişmediği gösterilmektedir. Ayrıca bu dalgaların kararlılık analizi için önce matematiksel modelin spektrumu Fourier dönüşüm yöntemiyle bulunmuştur. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için esas spektrumu stabilize eden bir ağırlık fonksiyonu olup olmadığı araştırılmıştır. Ardından ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının lineer kararlılığı hakkında bilgi verilmiştir. Bu lineer kararlılığı göstermek için (Yurov, 2013)'den yararlanılmaktadır.

Ele alınan sistem, sıcaklık (θ), oksijen (Y) ve katı yakıt (ρ) denge yasaların veren üç farklı denklemden oluşur.

$$\partial_t\theta + a\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi, \tag{1}$$

$$\partial_t\rho = -\rho Y\Phi, \tag{2}$$

$$\partial_t Y + a\partial_x Y = -\rho Y\Phi\,, \tag{3}$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{(-1/\theta)}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \le 0. \end{cases}$$

Burada $a > 0$ termal ve oksijen taşıma hızı olup Φ birim reaksiyon hızıdır. Tutuşma sıcaklığının üzerinde yanmanın gerçekleştiği varsayılır; $\theta = 0$ olacak şekilde tutuşma sıcaklığı normalize edilmiştir. Eşitlik 1., sıcaklığın taşınması ve difüzyonunun yanı sıra kimyasal reaksiyonla termal enerji üretimini temsil eder. Eşitlik 2., dağılmayan ve gazla taşınmayan katı yakıt tüketimini temsil eder. Eşitlik 3., kimyasal reaksiyonda oksijen taşınmasını ve tüketimini temsil eder. Oksijen difüzyonu ihmal edilir. Parametre sayısını azaltmak için denklemler boyutsuzlaştırılmıştır. Ayrıca $\rho \ge 0$ ve $Y \ge 0$ olan çözümlerle ilgilenilmektedir. Sabit sınır koşulları yukarıdaki sistemin $t \ge 0$ ve $-\infty < x < \infty$ için $(\theta, \rho, Y)(\mathrm{t}, -\infty) = (\theta^L, \rho^L, Y^L)$ ve $(\theta, \rho, Y)(\mathrm{t}, +\infty) = (\theta^R, \rho^R, Y^R)$ olarak verilmiştir.

Reaksiyonun sınırda gerçekleşmeyeceği varsayılmaktadır. Dolayısıyla $x = \pm\infty$ 'da ya oksijen yetersizliği $Y = 0$ yani (OC), ya yetersiz sıcaklık $\theta \le 0$ yani (TC), ya da yakıt yetersizliği $\rho = 0$ yani (FC), durumlarından birisi ya da iki veya üçü aynı anda ortaya çıkabilir.

Dalganın yönü $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$ şeklindedir. Bu dalga denkleminde sağ durum (θ^+, ρ^+, Y^+), sol durum ise (θ^-, ρ^-, Y^-)'dir. İlerleyen bir yanma dalgasının hızı c ile gösterilmektedir. Reaksiyon terimlerinin kaybolduğu durumlar; $TC \cap FC \cap OC, TC \cap OC, TC \cap FC, FC \cap OC, OC, TC, FC$ olacak şekilde sınıflandırılır. Durumların çeşidi, o durumda tam olarak hangi şartların

geçerli olduğunu göstermektedir. Örneğin, $\theta \leq 0, \rho = 0$ ve Y değeri pozitif ise sol durum $TC \cap FC$ tipindedir. Sınır koşullarının sadece FC, OC veya TC olabileceğini varsayıyoruz. Bunların kesişimi sınır koşullarında yer alamaz. Ancak bunların kesişimi ara durumların sağ ve sol durumu olarak bulunabilmektedir. Bir yanma dalgası ile sürekli $c \neq 0$, hızıyla hareket eden bir dalga kastedilmektedir. Diğer yaklaşımlar için (Zeldovic ve ark., 1985; Schult ve ark., 1996; Aldushin ve ark., 1999; Ghazaryan ve ark., 2010; Chapiro ve ark., 2012) 'e bakınız.

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. Giriş' te matematiksel model tanıtıldı. Model; sıcaklık, oksijen ve yakıt dengesini veren üç farklı denklemden oluşur. Sıcaklık belirli bir eşik değere ulaştığında yanma oluşmaktadır. Yanma dalgaları için daha önce yapılan çalışmalar hatırlanmaktadır. İkinci bölümde ise modele difüzyon terimi eklenerek verilen sistemi daha uygun bir biçimde incelemek için sistemi iki boyuta indirgeyerek ilerleyen dalgaların değişmediği gösterilmiştir. Difüzyon eklenmiş sistem için spektrum bulunmuştur. Ayrıca bu model için ağırlık fonksiyonunun olup olmadığı incelenmiştir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için lineer kararlılık çalışması yapılmıştır. Son olarak, sonuç bölümünde ise elde edilen bulgular özetlenerek sonuçlandırılmıştır.

MATERYAL VE METOT

Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgaları

Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının hızı negatif ($c < 0$) olarak kabul edilmiştir. Eşitlik 1-3. sistemindeki oksijen denklemine $\epsilon \partial_{xx} Y$ difüzyon terimi eklendiğinde oluşan yeni denklem sistemi aşağıda verilmiştir. Burada $\epsilon > 0$ küçük bir reel sayıdır.

$$\partial_t \theta + a\partial_x \theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y \Phi, \quad (4)$$

$$\partial_t \rho = -\rho Y \Phi, \quad (5)$$

$$\partial_t Y + a\partial_x Y = -\rho Y \Phi + \epsilon \partial_{xx} Y, \quad (6)$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{(-1/\theta)}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \leq 0. \end{cases}$$

Teorem 1: Eşitlik 4-6.'nın $TC \xrightarrow{c} OC$ ve $TC \xrightarrow{c} FC$ dışında ilerleyen dalgaları yoktur.

İspat: Eşitlik 5.' deki yakıt denkleminde bir adveksiyon terimi bulunmadığından sol durumda FC nin bulunma olasılığı yoktur. Enjekte edilen hava ile ilerleyen yanma dalgası zıt yönde ilerlediğinden, sol tarafın oksijen kontrollü durum olması mümkün değildir. Diğer yandan, aynı tipteki durumları birbirine bağlayan hiçbir yanma dalgası olmadığını görmek kolaydır. Geriye kalan olasılıklar $TC \xrightarrow{c} OC$ ve $TC \xrightarrow{c} FC$ dir.

İlerleyen dalga denklemi

Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarına difüzyon terimi eklendiğinde oluşan Eşitlik 4-6. sisteminin yanma dalgalarını en uygun şekilde bulmak için, Eşitlik 5. denklemini Eşitlik 4. ve Eşitlik 5. denklemlerinin toplamıyla ve Eşitlik 6. denklemini Eşitlik 6. ve Eşitlik 5. denklemlerinin farkıyla değiştirildiğinde elde edilen denklem sistemi ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + a\,\partial_x \theta &= \partial_{xx}\theta + \rho Y \Phi, \\ \partial_t(\theta + \rho) + a\,\partial_x \theta &= \partial_{xx}\theta, \\ \partial_t(Y - \rho) + a\,\partial_x Y &= \epsilon\,\partial_{xx} Y. \end{aligned}$$

$c < 0$ olmak üzere, $\xi = x - ct$ ile hareketli koordinatlara geçiş yapılırsa aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\partial_t\theta = (c-a)\,\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y\Phi(\theta), \quad (7)$$
$$\partial_t(\theta+\rho) = (c-a)\,\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + c\,\partial_\xi\rho, \quad (8)$$
$$\partial_t(Y-\rho) = (c-a)\,\partial_\xi Y + \epsilon\,\partial_{\xi\xi}Y - c\,\partial_\xi\rho. \quad (9)$$

Eşitlik 7-9. sisteminin sabit bir çözümü, c hızıyla Eşitlik 4-6. sisteminin ilerleyen bir dalga çözümüdür. Bu sisteminin sabit çözümleri ODE sistemini sağlar.

$$0 = (c-a)\,\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y\Phi(\theta), \quad (10)$$
$$0 = (c-a)\,\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + c\,\partial_\xi\rho, \quad (11)$$
$$0 = (c-a)\,\partial_\xi Y + \epsilon\,\partial_{\xi\xi}Y - c\,\partial_\xi\rho. \quad (12)$$

Şimdi $\partial_\xi\theta = v_1, \partial_\xi Y = v_2$ olsun ve $\dot{\theta} = v_1, \dot{Y} = v_2$ ile gösterilsin. Eşitlik 11. ile Eşitlik 12. nin ξ ye göre integrali alınırsa

$$\dot{\theta} = v_1, \quad (13)$$
$$\dot{Y} = v_2, \quad (14)$$
$$\dot{v_1} = (a-c)v_1 - \rho Y\Phi(\theta), \quad (15)$$
$$w_1 = (c-a)\theta + v_1 + c\rho, \quad (16)$$
$$w_2 = (c-a)Y + \epsilon v_2 - c\rho, \quad (17)$$

w_1 ve w_2 nin sabit olduğu sistem elde edilir. Eşitlik 17. kullanılarak Y için, Eşitlik 16. kullanılarak v_1 için çözüm bulunmaktadır. Dolayısıyla aşağıdaki indirgenmiş dalga sistemini elde ederiz.

$$\dot{\theta} = (a-c)\theta - c\rho + w_1, \quad (18)$$
$$\dot{\rho} = \frac{c\rho + w_2 - \epsilon v_2}{c(c-a)}\rho\Phi(\theta), \quad (19)$$
$$\epsilon\dot{v}_2 = \frac{w_2 + c\rho - \epsilon v_2}{c-a}\rho\Phi(\theta) - (c-a)v_2. \quad (20)$$

Eşitlik 18-20. sistemindeki w_1 ve w_2 ler parametre vektörleridir. Bunlar tam olarak $\epsilon = 0$ olduğunda (Barlas, 2020) çalışmasında elde edilen ilerleyen dalga denklemleri olup kritik manifold $v_2 = \frac{w_2+c\rho}{(c-a)^2}\rho\Phi(\theta)'$ dır. $v_2 = \frac{w_2+c\rho}{(c-a)^2}\rho\Phi(\theta) + \epsilon F(\theta,\rho,\epsilon)$ Eşitlik 18-20. de yerine yazıldığında yeni sistem hala $\rho = 0$ değişmez doğrusuna ve tüm denge noktalarını içeren $(a-c)\theta - c\rho + w_1$ ile tanımlanan H eş eğim doğrusuna sahiptir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları $\theta^- \le 0, \rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ ile TC sol durumuna sahip olduğundan, hala H'de bulunan denge noktalarına sahibiz. Ayrıca $\rho = 0$ değişmez doğrusu da H'de bulunan bir denge noktasına sahiptir. Böylece Eşitlik 1-3. sistemine difüzyon terimi eklendiğinde ilerleyen dalgaların değişmediği gösterilmiştir.

Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için spektrum

Bu bölümde, doğrusal olmayan PDE′ nin hareket eden bir dalga civarında linerize edilen spektrumunun yapısına ilişkin sonuçlar gözden geçirilmektedir. Sistemi ilerleyen dalga civarında linerize edip ve linerize edilen $\mathcal{L}$ operatörünün spektrumu incelenmektedir. $Sp(\mathcal{L})$ olarak ifade ettiğimiz $\mathcal{L}$ spektrumu, ayrık spektrum $Sp_d(\mathcal{L})$ ve esas spektrum $Sp_{\text{ess}}(\mathcal{L})'$ den oluşmaktadır. Ayrık spektrum, spektrumda izole edilmiş sonlu çokluğu olan $\mathcal{L}'$ nin tüm özdeğerlerinin kümesidir ve esas spektrum, spektrumun geri kalanıdır. Bu bölümde, $Sp_{\text{ess}}(\mathcal{L})$ incelenmektedir. $c < 0$ olmak üzere, Eşitlik 4-6. sistemini $\xi = x - ct$ ile hareketli koordinatlara geçiş yapılırsa;

$$\partial_t\theta = \partial_{\xi\xi}\theta + (c-a)\partial_\xi\theta + F, \quad (21)$$
$$\partial_t\rho = c\partial_\xi\rho - F, \quad (22)$$

$$\partial_t Y = \epsilon \partial_{\xi\xi} Y + (c-a)\partial_\xi Y - F, \tag{23}$$

sistemi elde edilir. Burada $F = \rho Y \Phi$ dir. c hızıyla ilerleyen $T^*(\xi) = (\theta^*(\xi), \rho^*(\xi), Y^*(\xi))$ dalgasının Eşitlik 21-23. sisteminin sabit bir çözümü ile birlikte sol ve sağ durumu $\lim_{\xi\to-\infty} T^*(\xi) = T^-$, $\lim_{\xi\to+\infty} T^*(\xi) = T^+$.

Varsayalım ki; $T^*(\xi)$, $T^\pm$, ye üstel bir oranda yaklaşsın. $T^*(\xi)$ dalgasının kararlılığı, $T = T^* + \tilde{T}$ şeklindeki küçük bir T^* pertürbasyonunu alarak ve ardından bunun bir T^* ötelenmesine yakınsadığını göstererek kanıtlanmıştır. Bu sistem ilerleyen bir $T^*(\xi)'$ da linerize edildiğinde elde edilen sistem aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t \tilde{\theta} = \partial_{\xi\xi}\tilde{\theta} + (c-a)\partial_\xi \tilde{\theta} + F_\theta\big(T^*(\xi)\big)\tilde{\theta} + F_\rho\big(T^*(\xi)\big)\tilde{\rho} + F_Y\big(T^*(\xi)\big)\tilde{Y}, \tag{24}$$

$$\partial_t \tilde{\rho} = c\partial_\xi \tilde{\rho} - F_\theta(T^*(\xi))\tilde{\theta} - F_\rho(T^*(\xi))\tilde{\rho} - F_Y(T^*(\xi))\tilde{Y}, \tag{25}$$

$$\partial_t \tilde{Y} = (c-a)\partial_\xi \tilde{Y} + \epsilon\partial_{\xi\xi}\tilde{Y} - F_\theta(T^*(\xi))\tilde{\theta} - F_\rho(T^*(\xi))\tilde{\rho} - F_Y(T^*(\xi))\tilde{Y}. \tag{26}$$

Eşitlik 24-26. ile verilen sistemin spektrumunu bulmak için, $\mathcal{L}$ operatörü $\mathcal{X}_t = \mathcal{L}\mathcal{X}$ olacak şekilde yazıldığında, aşağıdaki operatör elde edilmektedir.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a)\partial_\xi + F_\theta\big(T^*(\xi)\big) & F_\rho\big(T^*(\xi)\big) & F_Y\big(T^*(\xi)\big) \\ -F_\theta\big(T^*(\xi)\big) & c\partial_\xi - F_\rho\big(T^*(\xi)\big) & -F_Y\big(T^*(\xi)\big) \\ -F_\theta\big(T^*(\xi)\big) & -F_\rho\big(T^*(\xi)\big) & (c-a)\partial_\xi + \epsilon\partial_{\xi\xi} - F_Y\big(T^*(\xi)\big) \end{pmatrix}.$$

$T^\pm$' de Eşitlik 21-23. sistemi linerize edildiğinde elde edilen, $\mathcal{X}_t = \mathcal{L}_\pm \mathcal{X}$ sabit katsayılı iki doğrusal kısmi diferansiyel denklem sistemi vardır. $\mathcal{L}_\pm$ spektrumu, Fourier dönüşümü kullanılarak hesaplanmıştır.

$$\hat{\mathcal{L}}_\pm = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) + F_\theta\big(T^*(\pm\infty)\big) & F_\rho\big(T^*(\pm\infty)\big) & F_Y\big(T^*(\pm\infty)\big) \\ -F_\theta\big(T^*(\pm\infty)\big) & i\mu c - F_\rho\big(T^*(\pm\infty)\big) & -F_Y\big(T^*(\pm\infty)\big) \\ -F_\theta\big(T^*(\pm\infty)\big) & -F_\rho\big(T^*(\pm\infty)\big) & i\mu(c-a) - \epsilon\mu^2 - F_Y\big(T^*(\pm\infty)\big) \end{pmatrix}.$$

L^2 veya H^1'deki $\mathcal{L}$'nin esas spektrumunun sağ tarafındaki sınırı, $Sp(\mathcal{L}_-)$ ve $Sp(\mathcal{L}_+)$' nin sağ taraftaki sınırlarının birleşiminden oluşmaktadır.

Tanım 1: Aşağıdaki iki madde sağlanırsa, ilerleyen $T^*(\xi)$ dalgası bir $\mathcal{X}$ uzayında spektral olarak kararlıdır.

- $0, \mathcal{X}$ üzerinde $\mathcal{L}'$nin, özfonksiyon $T^*(\xi)'$ ile izole edilmiş basit bir özdeğeridir.
- $v > 0$ vardır öyle ki $\mathcal{L}$'nin $\mathcal{X}$ üzerindeki spektrumunun geri kalanı Re $\lambda < -v$ de bulunur.

Eşitlik 4-6. sisteminin $TC \xrightarrow{c} OC$ ve $TC \xrightarrow{c} FC$ dışında ilerleyen dalgaların olmadığını gösterilmişti. Şimdi bu dalgaların spektrumlarını bulalım.

TC sol durum: Her iki dalganın sol durumu TC tipine sahip olduğundan, önce $\hat{\mathcal{L}}_-$ nin spektrumu (θ^-, ρ^-, Y^-) de hesaplanır. Burada $\theta^- \le 0, \rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ dir.

$$\hat{\mathcal{L}}_- = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & 0 & 0 \\ 0 & i\mu c & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

L^2 veya H^1 deki $\hat{\mathcal{L}}_-$'nın spektrumu, $\mathbb{R}'$ de bazı μ' ler için Eşitlik 27. nin özdeğerleri olan λ kümeleridir. Böylece, öz değerler şu şekilde parametrelendirilir.

$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \lambda(\mu) = i\mu c, \lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a).$

Linerize edilen $\hat{\mathcal{L}}_-$ operatörünün spektrumu, orijin noktasında sanal eksene teğet ve kolları sol yarı düzlemde bulunan iki parabol ve sanal eksenle çakışan bir dikey doğru ile tanımlanır.

OC sağ durum: (θ^+, ρ^+, Y^+) noktasında $\hat{\mathcal{L}}_+{}'$nın spektrumu belirlenmektedir. Burada $\theta^+ \leq 0, \rho^+ > 0$ ve $Y^+ = 0$.

$$\hat{\mathcal{L}}_+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & 0 & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & i\mu c & -\rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & 0 & -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) - \rho^+\Phi(\theta^+) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

L^2 veya H^1 ' deki $\hat{\mathcal{L}}_+{}'$ nın spektrumu, $\mathbb{R}'$ deki bazı μ' ler için Eşitlik 28. in özdeğerleri olan λ kümeleridir.

$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a)$, $\lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) - \rho^+\Phi(\theta^+)$, $\lambda(\mu) = i\mu c$.

Dolayısıyla, linerize edilen $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu, sol yarı düzlemde bir parabol, orijin noktasında sanal eksene teğet ve kolları sol yarı düzlemde bulunan başka bir parabol ve sanal eksenle çakışan bir dikey doğru ile tanımlanır.

FC sağ durumu: (θ^+, ρ^+, Y^+) noktasında $\hat{\mathcal{L}}_+{}'$ nın spektrumu belirlenmektedir. Burada $\theta^- \leq 0, \rho^+ = 0$ ve $Y^+ > 0$.

$$\hat{\mathcal{L}}_+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & i\mu c - Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & Y^+\Phi(\theta^+) & -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

L^2 veya H^1 ' deki $\hat{\mathcal{L}}_+{}'$ nın spektrumu, $\mathbb{R}'$ deki bazı μ' ler için Eşitlik 29. in özdeğerleri olan λ kümeleridir.

$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a)$, $\lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a), \lambda(\mu) = i\mu c - Y^+\Phi(\theta^+)$.

Dolayısıyla, linerize edilen $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu, sol yarı düzlemde, orijine temas eden iki parabolden oluşur. Ayrıca sol yarı düzlemde parabollerin üzerinden geçen bir dikey doğrudan oluşur.

Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonu

Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için $\mathcal{L}_-$ ve $\mathcal{L}_+$ spektrumu sanal eksene değdiği için herhangi bir yanma dalgası için spektral kararlılığa sahip değiliz. Bu spektrumlar, ağırlıklı normlu bir uzayda çalışılarak sanal eksenin soluna hareket ettirilebilirse spektral kararlılık elde edilebilir. $\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) \in \mathbb{R}^2, \gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için bir ağırlık fonksiyonu tanımlanmaktadır. Burada

$$\gamma_\alpha(\xi) = \begin{cases} e^{\alpha-\xi}, & \xi \leq 0 \\ e^{\alpha+\xi}, & \xi \geq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. $\mathcal{X}_0$, standart Banach uzaylarından $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ veya $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ ile ve normu $\| \ \|_0$ ile gösterilmektedir. $\mathcal{X}_\alpha, \gamma_\alpha(\xi)$ ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen ağırlıklı uzayını göstersin öyle ki $x(\xi) \in \mathcal{X}_\alpha$ için $\gamma_\alpha(\xi)x(\xi) \in \mathcal{X}_0$ iken $\|\gamma_\alpha(\xi)x(\xi)\|_0$ normu ile gösterilmektedir.

Sol ve sağ uç durumlarında ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonlarını belirlemek için $\mathcal{X}_\alpha$ üzerinde $\mathcal{L}$ nin spektrumunun bulunması gerekmektedir. $X = \left(\tilde{\theta}(\xi), \tilde{\rho}(\xi), \tilde{Y}(\xi)\right) \in \mathcal{X}_\alpha$ ve $W = \gamma_\alpha(\xi)X = \left(u(\xi), v(\xi), z(\xi)\right) \in \mathcal{X}_0$ olacak şekilde seçildiğinde $X_t = \mathcal{L}X$ denklemi $\gamma_\alpha^{-1}W_t = \mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}W$ 'yi verir. Her iki tarafı γ_α ile çarpıldığında $W_t = \gamma_\alpha\mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}W$ denklemi elde edilir, burada $\gamma_\alpha\mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}$ $\mathcal{X}_0$ üzerinde lineer bir operatörden oluşur. $\mathcal{L}'$nin $\mathcal{X}_\alpha$ üzerindeki spektrumunu bulmak için, $\mathcal{X}_0$ üzerinde $\mathcal{L}_\alpha = \gamma_\alpha\mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}$ izomorfik operatörünün spektrumunu bulmak yeterlidir. Burada $\gamma_\alpha X = W \in \mathcal{X}_0$ için $X = \gamma_\alpha^{-1}W$ elde edilir. Eşitlik 24-26. da yerine yazıldığında;

$$\partial_t u = u_{\xi\xi} + (c - a - 2\alpha)u_\xi + (\alpha^2 - c\alpha + a\alpha)u(\xi) + F, \quad (30)$$

$$\partial_t v = cv_\xi - c\alpha v(\xi) - F, \tag{31}$$

$$\partial_t z = \epsilon z_{\xi\xi} + (c - a - 2\epsilon\alpha)z_\xi + (\epsilon\alpha^2 + a\alpha - c\alpha)z(\xi) - F, \tag{32}$$

elde edilen Eşitlik 30-32. $\mathcal{L}_\alpha{}'$ yı verir. $\mathcal{L}_\alpha$ operatör olarak yazıldığında;

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{pmatrix} (\partial_{\xi\xi} + (c - a - 2\alpha)\partial_\xi + \\ \alpha^2 + a\alpha - c\alpha + F_\theta(T^*)) & F_\rho(T^*) & F_Y(T^*) \\ -F_\theta(T^*) & c\partial_\xi - c\alpha - F_\rho(T^*) & -F_Y(T^*) \\ -F_\theta(T^*) & -F_\rho(T^*) & (\epsilon\partial_{\xi\xi} + (c - a - 2\epsilon\alpha)\partial_\xi \\ & & +\epsilon\alpha^2 + a\alpha - c\alpha - F_Y(T^*)) \end{pmatrix}.$$

elde edilir. Bu operatörde $\xi \to \pm\infty$ alındığında, $W_t = \mathcal{L}_\alpha W$ denklemi sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler için $W_t = \mathcal{L}_\alpha^{\pm} W$ denklemini verir. Burada

$$\mathcal{L}_\alpha^- = \begin{pmatrix} (\partial_{\xi\xi} + (c - a - 2\alpha_-)\partial_\xi + \\ \alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- + F_\theta(T^-)) & F_\rho(T^-) & F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & c\partial_\xi - c\alpha_- - F_\rho(T^-) & -F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & -F_\rho(T^-) & (\epsilon\partial_{\xi\xi} + (c - a - 2\epsilon\alpha_-)\partial_\xi \\ & & +\epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- - F_Y(T^-)) \end{pmatrix} \tag{33}$$

ve

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} (\partial_{\xi\xi} + (c - a - 2\alpha_+)\partial_\xi + \\ \alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ + F_\theta(T^+)) & F_\rho(T^+) & F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & c\partial_\xi - c\alpha_+ - F_\rho(T^+) & -F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & -F_\rho(T^+) & (\epsilon\partial_{\xi\xi} + (c - a - 2\epsilon\alpha_+)\partial_\xi \\ & & +\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ - F_Y(T^+)) \end{pmatrix} \tag{34}$$

$\mathcal{L}_\alpha{}'$ nın esas spektrumunun sağ sınırı, $Sp(\mathcal{L}_\alpha^-)$ve $Sp(\mathcal{L}_\alpha^+)'$ nın sağ taraftaki sınırların birleşiminden oluşur. Eşitlik 33. ve Eşitlik 34. operatörlerine Fourier dönüşümü uygulandığında;

$$\mathcal{L}_\alpha^- = \begin{pmatrix} (-\mu^2 + (c - a - 2\alpha_-)i\mu + \\ \alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- + F_\theta(T^-)) & F_\rho(T^-) & F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & ci\mu - c\alpha_- - F_\rho(T^-) & -F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & -F_\rho(T^-) & (-\epsilon\mu^2 + (c - a - 2\epsilon\alpha_-)i\mu \\ & & +\epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- - F_Y(T^-)) \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} (-\mu^2 + (c - a - 2\alpha_+)i\mu + \\ \alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ + F_\theta(T^+)) & F_\rho(T^+) & F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & ci\mu - c\alpha_+ - F_\rho(T^+) & -F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & -F_\rho(T^+) & (-\epsilon\mu^2 + (c - a - 2\epsilon\alpha_+)i\mu \\ & & +\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ - F_Y(T^+)) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

***TC* sol durumu:** Sol durum, ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için aynı tip TC' ye sahip olduğundan, sol uç durumda (θ^-, ρ^-, Y^-) için $\mathcal{L}_\alpha^-$'nın spektrumu hesaplanmaktadır. Burada $\theta^- \leq 0, \rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ dir.

$$\mathcal{L}_{\alpha}^{-}=\begin{pmatrix}(-\mu^2+(c-a-2\alpha_-)i\mu+ & & \\ \alpha_-^2+a\alpha_--c\alpha_-) & 0 & 0 \\ 0 & ci\mu-c\alpha_- & 0 \\ 0 & 0 & (-\epsilon\mu^2+(c-a-2\epsilon\alpha_-)i\mu+ \\ & & \epsilon\alpha_-^2+a\alpha_--c\alpha_-)\end{pmatrix}. \quad (35)$$

$\mathcal{L}_{\alpha}^{-}$ spektrumu, $\mathbb{R}$'deki bazı μ'ler için Eşitlik 35. in özdeğerleri olan λ kümeleridir. Bu λ kümeleri aşağıda verilmiştir.

$\lambda(\mu)=-\mu^2+(c-a-2\alpha_-)i\mu+\alpha_-^2+(a-c)\alpha_-,$

$\lambda(\mu)=i\mu c-c\alpha_-,$

$\lambda(\mu)=-\epsilon\mu^2+(c-a-2\epsilon\alpha_-)i\mu+\epsilon\alpha_-^2+(a-c)\alpha_-.$

Spektrumu sol yarı düzleme taşımak için, tüm özdeğerlerin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu nedenle;

$-\mu^2+\alpha_-^2+a\alpha_--c\alpha_-<0, \quad (36)$

$-c\alpha_-<0, \quad (37)$

$-\epsilon\mu^2+\epsilon\alpha_-^2+a\alpha_--c\alpha_-<0, \quad (38)$

eşitsizliklerini sağlayan bir α_-değeri bulunması gerekir. ($c<0$ olduğuna dikkat edin.) İkinci eşitsizliğin sağlanması için $\alpha_-<0$ olarak seçilmelidir. Bu durumda tüm eşitsizliklerin sağlanması için

$\max\left\{c-a,\frac{c-a}{\epsilon}\right\}<\alpha_-<0$

olacak şekilde seçilirse spektrum sol yarı düzlem üzerinde bulunur.

***FC* sağ durumu:** Benzer hesaplama ile, (θ^+,ρ^+,Y^+) noktasında $\mathcal{L}_{\alpha}^{+}$, nin spektrumu bulunmaktadır. Burada $\theta^+>0,\rho^+=0$ ve $Y^+>0$ dir.

$$\mathcal{L}_{\alpha}^{+}=\begin{pmatrix}(-\mu^2+(c-a-2\alpha_+)i\mu & & \\ +\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+) & Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & ci\mu-c\alpha_+-Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & Y^+\Phi(\theta^+) & (-\epsilon\mu^2(c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu \\ & & +\epsilon\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+)\end{pmatrix}. \quad (39)$$

$\mathcal{L}_{\alpha}^{+}$' nın spektrumu, $\mathbb{R}$'deki bazı μ'ler için Eşitlik 39. ün özdeğerleri olan λ kümeleridir. Bu λ kümeleri aşağıda verilmiştir.

$\lambda(\mu)=-\mu^2+(c-a-2\alpha_+)i\mu+\alpha_+^2+(a-c)\alpha_+,$

$\lambda(\mu)=i\mu c-c\alpha_+-Y^+\Phi(\theta^+),$

$\lambda(\mu)=-\epsilon\mu^2+(c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu+\epsilon\alpha_+^2+(a-c)\alpha_+.$

Spektrumu sol yarı düzleme taşımak için, tüm özdeğerlerin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu nedenle;

$-\mu^2+\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+<0,$

$-c\alpha_+-Y^+\Phi(\theta^+)<0,$

$-\epsilon\mu^2+\epsilon\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+<0,$

eşitsizliklerini sağlayan bir α_+değeri bulunması gerekir.

$\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+<0\Rightarrow\alpha_+(\alpha_++a-c)<0,$

$-c\alpha_+-Y^+\Phi(\theta^+)<0\Rightarrow-c\alpha_+<Y^+\Phi(\theta^+)\Rightarrow\alpha_+<-\frac{Y^+\Phi(\theta^+)}{c},$

$\epsilon\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+<0\Rightarrow\alpha_+(\epsilon\alpha_++a-c)<0.$

Bu durumda tüm eşitsizliklerin sağlanması için

$\max\left\{c-a, \frac{c-a}{\epsilon}\right\} < \alpha_+ < 0$

olacak şekilde seçilirse spektrum sol yarı düzlem üzerinde bulunur.

***OC* sağ durumu:** Burada $c<0$ ve $Y^+>0$ olduğuna dikkat edin. Benzer olarak, (θ^+, ρ^+, Y^+)noktasında $\mathcal{L}_\alpha^+$' nin spektrumu bulunmaktadır. Burada $\theta^+>0, \rho^+>0$ ve $Y^+=0$ dır.

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} (-\mu^2+(c-a-2\alpha_+)i\mu \\ +\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+) & 0 & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & ci\mu-c\alpha_+ & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & 0 & (-\epsilon\mu^2+(c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu \\ & & +\epsilon\alpha_+^2+a\alpha_+-c\alpha_+-\rho^+\Phi(\theta^+)) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

$\mathcal{L}_\alpha^+$ ′nın spektrumu, $\mathbb{R}'$deki bazı μ'ler için Eşitlik 40. in özdeğerleri olan λ kümeleridir.

$\lambda(\mu) = -\mu^2+(c-a-2\alpha_+)i\mu+\alpha_+^2+(a-c)\alpha_+,$

$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_+,$

$\lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2+(c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu+\epsilon\alpha_+^2+(a-c)\alpha_+-\rho^+\Phi(\theta^+).$

Spektrumu sol yarı düzleme taşımak için özdeğerlerin reel kısmının sıfırdan küçük olma şartı sağlanmalıdır. O zaman;

$-\mu^2+\alpha_+^2+(c-a)\alpha_+ < 0,$

$-c\alpha_+ < 0,$

$-\epsilon\mu^2+\epsilon\alpha_+^2+(a-c)\alpha_+-\rho^+\Phi(\theta^+) < 0,$

eşitsizliklerini sağlayan bir α_+değeri bulunması gerekir. Burada $c<0$ ve $\rho^+>0$ olduğuna dikkat edin.

Tüm eşitsizlikleri sağlayan α_+ değeri

$$\max\left\{\frac{c-a-\sqrt{(a-c)^2+4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+)}}{2\epsilon}, c-a\right\} < \alpha_+ < 0$$

olacak şekilde seçildiğinde spektrum sol yarı düzlem üzerinde bulunur.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Lineer Kararlılık

Bu alt başlıkta, ters yönde $c<0$ hızı ile ilerleyen yanma dalgalarının lineer kararlılığı incelenmektedir. Bir önceki bölümde, bir dalganın esas spektrumunun, ağırlık fonksiyonu $\gamma_\alpha(\xi), \alpha=(\alpha_-, \alpha_+)$ kullanılarak sanal eksenin soluna hareket ettirilebileceğini gördük. Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının ağırlık fonksiyonları:

1. TC sol durum için $\max\left\{c-a, \frac{c-a}{\epsilon}\right\} < \alpha_- < 0,$
2. FC sağ durum için $\max\left\{c-a, \frac{c-a}{\epsilon}\right\} < \alpha_+ < 0,$
3. OC sağ durum için $\max\left\{\frac{c-a-\sqrt{(a-c)^2+4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+)}}{2\epsilon}, c-a\right\} < \alpha_+ < 0,$

olacak şekilde seçildiğinde spektrumun sol yarı düzlem üzerinde yer alabileceği görüldü. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için, (Ozbag ve Kuru, 2021)' de lineer operatör $\mathcal{L}'$ nin sağ yarı-düzlemde sıfırdan farklı hiçbir özdeğeri olmadığı gösterilmiştir. Bu bölümde, $\mathcal{X}_\alpha$ ağırıklı uzayında spektral olarak kararlı olan ters yönde ilerleyen yanma dalgasını ele alıyoruz. $\mathcal{X}_\alpha$ ′da ilerleyen dalganın lineer kararlılığı, standart sonuçların kullanıldığı spektral kararlılıktan çıkmaz. Eşitlik 4-6. sistemi kısmen parabolik olduğundan, lineerleştirilmiş operatörün spektrumunda dikey doğrular vardır, dolayısıyla sektörel operatör değildir. Bu nedenle, lineerize edilen sistem bir analitik yarı grup değil,

bir C_0-yarı grup üretir. Bu zorluk, bazı denklemlerde olduğu gibi, difüzyonu olmayan sistemler için tipiktir. Bununla birlikte, $\mathcal{X}_\alpha$ 'daki lineerleştirilmiş kararlılık, $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ veya $H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ ' ye eşit olan $\mathcal{X}_0$ için (Yurov, 2013)' ün yakın tarihli bir sonucu ile spektral kararlılıktan kaynaklanmaktadır. (Yurov, 2013) makalesinde ele alınan sistem ise aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t U = d\partial_{xx}U + \tilde{a}\partial_x U + R_1(U,V), \quad (41)$$

$$\partial_t V = \tilde{b}\partial_x V + R_2(U,V). \quad (42)$$

Burada $U = U(x,t) \in \mathbb{R}^{N_1}$ ve $V = V(x,t) \in \mathbb{R}^{N_2}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ dir. Ayrıca $\tilde{a} = (\tilde{a}_{kl})$ $N_1 X N_1$ boyutunda ve tüm $d_k > 0$ için $d = \text{diag}(d_1, \dots., d_{N_1})$ ve $\tilde{b} = \text{diag}(b_1, \dots \dots \dots, b_{N_2})$ dir. d ve $\tilde{b}$ matrisleri sabittir ve R_j fonksiyonları C^2 dır. Şu an için, $\tilde{a}$ hakkında varsayımlarda bulunmaktan kaçınıyoruz. $\xi = x - ct$ dönüşümünden sonra, yukarıdaki sistem

$$\partial_t U = d\partial_{\xi\xi}U + a\partial_\xi U + R_1(U,V), \quad (43)$$

$$\partial_t V = b\partial_\xi V + R_2(U,V), \quad (44)$$

olur. Burada $a = \tilde{a} + \text{diag}(c, \dots., c)$ ve $b = \tilde{b} + \text{diag}(c, \dots, c)$ dir. Böylece, b sabit bir köşegen matristir. R_j fonksiyonlarının diferansiyelleri $R_{j1} = \partial_U R_j$ ve $R_{j2} = \partial_V R_j$ ile gösterilmektedir. $T^*(\xi) = (U^*(\xi), V^*(\xi))$, Eşitlik 41-42.' nin son durumlarına üssel olarak yaklaşan c hızıyla hareket eden bir dalga çözümü olsun. O zaman Eşitlik 43-44.' ün $T^*(\xi)'$ deki lineerizasyonu;

$$\binom{U_t}{V_t} = \mathcal{L}\binom{U}{V},\ \mathcal{L} = \begin{pmatrix} d\partial_{\xi\xi} + a\partial_\xi + R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & b\partial_\xi + R_{21} \end{pmatrix} \quad (45)$$

şeklindedir. Burada $R_{jk} = R_{jk}(U^*(\xi), V^*(\xi))$ dır.

Ağırlık fonksiyonu $\gamma_\alpha(\xi)$ olan, ağırlıklı bir Banach uzayı $\mathcal{X}_\alpha$ üzerinde $\mathcal{L}'$yi incelemek için, bunun yerine $\mathcal{X}_0$ üzerinde izomorfik operatör $\mathcal{L}_\alpha = \gamma_\alpha \mathcal{L} \gamma_\alpha{}^{-1}$ 'yı inceleriz. Bu $\mathcal{L}_\alpha, S_{jk}(\xi)$ ' nin sürekli olarak türevlenebilir olduğu ve $S'_{jk}(\xi) \to 0$ in üssel olarak $\xi \to \pm\infty$ olduğu

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{pmatrix} d\partial_{\xi\xi} + \hat{a}\partial_\xi + S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & b\partial_\xi + S_{21} \end{pmatrix} \quad (46)$$

biçimine sahiptir. d ve b'nin Eşitlik 45.' te değişmediğine dikkat edin.

İlerleyen dalga $T^*(\xi), \mathcal{X}_\alpha$ ' da spektral olarak kararlıysa, o zaman $\mathcal{X}_\alpha$ 'da doğrusal olarak kararlıdır. Bunu doğrulamak için, (Yurov, 2013)' deki teorem 1.1' e başvurabiliriz; bu, $d = \text{diag}(d_1, \dots\dots, d_{N_1})$ ile L^2 üzerinde Eşitlik 46. formunda bir lineer operatör olduğunu ima eder. Tüm d_k pozitif sabitleri için $\hat{a}(\xi)$ ve S_{jk} süreklidir ve uç durumlara üstel olarak yaklaşır ve b sabit bir diyagonal matristir. Ayrıca Eşitlik 4-6. sistemi için $\tilde{b} = \text{diag}(0, a)$ olduğuna dikkat edin. Böylece, spektral kararlılık doğrusal kararlılık anlamına gelir. (Ghazaryan ve ark., 2010) makalesinin bölüm 3' teki bir argümanla, $\hat{a}(\xi)$ ve $S_{jk}(\xi)'$ nin sürekli olarak türevlenebilir olması ve türevlerinin üstel olarak $\xi \to \pm\infty$ şeklinde üstel olarak $0'$ a gitmesi koşuluyla, aynı sonuç H^1 üzerinde de geçerlidir.

SONUÇ

Bu makalede başlangıçta bir miktar katı yakıt içeren gözenekli düzeneğe oksijen enjekte edildiğinde meydana gelen yanma dalgaları ele alınmıştır. Bu yanma sistemi parçalı parabolik sistemdir. Ele alınan model sıcaklık, katı yakıt ve oksijen denge yasalarını veren üç farklı diferansiyel denklemlerinden oluşur. Bu çalışmada, oksijen ve sıcaklığın hızı aynı kabul edilerek yanma dalgası ters yönde ilerlemektedir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarına difüzyon terimi eklendiğinde ilerleyen dalgaların değişmediği gösterilmiştir. Ayrıca bu dalgaların kararlılık analizi için önce matematiksel modelin esas spektrumu Fourier dönüşüm metodu kullanılarak bulunmuştur. Bu metotla

ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının sol ve sağ durumlardaki özdeğerleri bulunmuştur. Elde edilen bu özdeğerlerden sanal eksene dokunan paraboller oluşmaktadır. Spektral kararlılık için sağ yarı düzlem üzerindeki esas spektrumu sol yarı düzleme öteleyen bir ağırlık fonksiyonu bulunmuştur. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için lineer kararlılık çalışması yapılmıştır.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Bu makale, birinci yazarın danışmanlığında bulunan ikinci yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

KAYNAKLAR

Akkutlu, I., & Yortsos, Y. (2003). The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. *Combustion and Flame, 134*, 229-247.

Aldushin, A., Rumanov, I., & Matkowsky, B. (1999). Maximal energy accumulation in a superadiabatic filtration combustion wave. *Combustion and Flame, 118*, 76-90.

Barlas, G. (2020). Gözenekli ortamda ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı. (Master's thesis, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Şanlıurfa).

Chapiro, G., & Senos, L. (2017). Riemann solutions for counterflow combustion in light porous foam. *Computational and Applied Mathematics*.

Chapiro, G., Marchesin, D., & Schecter, S. (2014). Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam. *Journal of Hyperbolic Differential Equations, 11*, 295-328.

Chapiro, G., Mailybaev, A. A., Souza, A., Marchesin, D., & Bruining, J. (2012). Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational Geosciences, 16*, 799-808.

Chapiro, G., & Souza, A. J. (2016). Asymptotic approximation for counterflow combustion in porous media. *Applied Analysis, 95*(1), 63-77.

Ghazaryan, A., Latushkin, Y., Schecter, S., & Souza, A. (2010). Stability of gasless combustion fronts in one-dimensional solids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 198*(3), 981-1030.

Marchesin, D., & Schecter, S. (2003). Oxidation heat pulses in two-phase expansive flow in porous media. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 54*(1), 48-83.

Ozbag, F. (2022). Numerical simulations of traveling waves in a counterflow filtration combustion model. *Turkish Journal of Mathematics, 46*(4), 1424-1435.

Ozbag, F., ve Kuru, B. C. (2021). İlerleyen yanma dalgalarının Evans fonksiyonu ile spektral kararlılığı. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 11*(2), 663-679.

Ozbag, F., Schecter, S., & Chapiro, G. (2018). Traveling waves in a simplified gas-solid combustion model in porous media. *Advances in Differential Equations, 23*, 409-454.

Ozbag, F., & Schecter, S. (2018). Stability of combustion waves in a simplified gas–solid combustion model in porous media. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 376*(2117), 20170185.

Schult, D., Bayliss, A., & Matkowsky, B. (1998). Traveling waves in natural counterflow filtration combustion and their stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 58*(3), 806-852.

Schult, D., Matkowsky, B., Volpert, V., & Fernand-Pello, A. (1996). Forced forward smolder combustion. *Combustion and Flame, 104*(1-2), 1-26.

Souza, A. J. (2008). Counterflow combustion in a porous medium. In *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications* (pp. 1005-1012). New York: Springer.

Yurov, V. (2013). Stability estimates for semigroups and partly parabolic reaction diffusion equation. (Doctoral thesis, University of Missouri).

Zeldovich, Y. B., Barenblatt, G. I., Librovich, V. B., & Makhviladze, G. M. (1985). *The mathematical theory of combustion and explosion*. New York: Consultants Bureau.